

Department of Mechanical and Production Engineering

Aarhus University

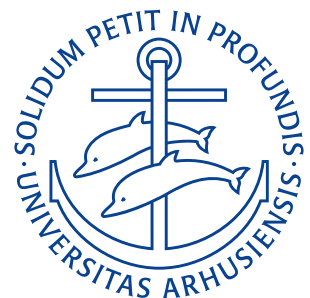
Exercises

Author: Noah Rahbek Bigum Hansen

Student ID: 202405538

Course: Dynamik og Vibrationer — 290211U001

Date: 1. december 2025

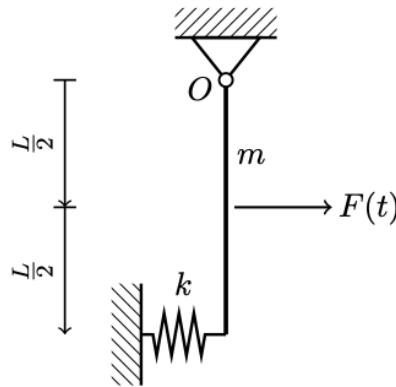


Lecture 1: Introduction

26. August 2025

1.1 Exercise 1.1

We consider the rotation of a rigid body shown in **Figure 0.1** about the point O . The rod has mass m and the spring fastened to the rod at distance L from the point O has stiffness k . A force $F(t)$ is applied at a distance $L/2$ from the point O .



Figur 0.1

- a) Derive the non-linear equation of motion for the rotation of the rigid body.

We determine the resultant moment around O as:

$$I_O \ddot{\theta} = -kL \sin \theta L \cos \theta - mg \frac{L}{2} \sin \theta + F \frac{L}{2} \cos \theta$$

$$I_O \ddot{\theta} + \sin \theta \left(kL^2 \cos \theta + mg \frac{L}{2} \right) = F \frac{L}{2} \cos \theta$$

The moment of inertia for a rod rotating about its end is given by $I_O = \frac{1}{3} mL^2$. Therefore we get:

$$\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \sin \theta \left(kL^2 \cos \theta + mg \frac{L}{2} \right) = F \frac{L}{2} \cos \theta.$$

- b) Linearize the non-linear equation of motion using the assumption of small rotations.

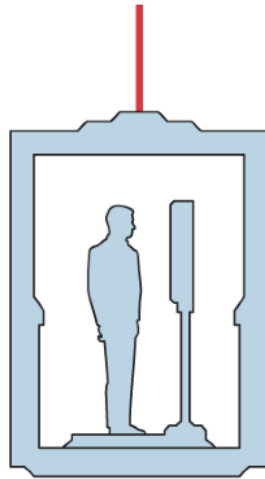
By assuming $\cos \theta \approx 1$ and $\sin \theta \approx \theta$ we get:

$$\frac{1}{3} mL^2 \ddot{\theta} + \theta \left(kL^2 + mg \frac{L}{2} \right) = F \frac{L}{2}.$$

1.2 Exercise 1.2

A person weighing 75 kg is standing on a scale in an elevator as shown on **Figure 0.2**. During the first 3 seconds of vertical motion upwards from rest, the force in the cable is 8300 N. Determine what the scale shows (in Newton) in this configuration. It is noted that the total mass of the elevator, person and scale is 750 kg.

Let $m_p = 75$ kg denote the mass of the person and $m = 750$ kg denote the entire mass of the system. Also let



Figur 0.2

$F_c = 8300\text{ N}$ denote the force in the cable. Newton's second law on the entire system gives

$$m\ddot{d} = F_c - mg \implies \ddot{d} = \frac{F_c - mg}{m}.$$

For the person inside the elevator using Newton's second law gives

$$m_p\ddot{d} = F_R - m_pg \implies F_R = m_p\ddot{d} + m_pg$$

where F_R is the reactant force the scale exerts on the person (i.e. the force the person exerts on the scale). Substituting in the previous expression for $\ddot{d}$ we get

$$\begin{aligned} F_R &= m_p(\ddot{d} + g) \\ &= m_p\left(\frac{F_c - mg}{m} + g\right) \\ &= m_p\left(\frac{F_c}{m}\right) \\ &= \frac{m_p F_c}{m} \\ &= \frac{75\text{ kg} \cdot 8300\text{ N}}{750\text{ kg}} \\ &= 830\text{ N}. \end{aligned}$$

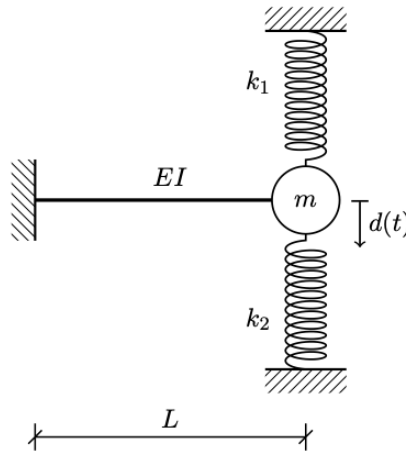
Therefore the scale will show a reading of 830 N.

Lecture 2: Free motion/eigenmotion of SDOF systems

2. September 2025

2.1 Exercise 2.1

We consider the shown system, which is to be analysed as an equivalent single-degree of freedom system (SDOF-system) with the transverse motion of the point mass m as the degree of freedom. It is noted, that the stiffness of the beam (without taking the discrete springs into account) against transverse direction in the free end due to a transverse force acting in this point is $k_{\text{beam}} = \frac{3EI}{L^3}$, where L , I , and E is the length, area-moment of inertia and the elastic modulus of the beam. Assume, that the beam and the discrete springs are mass-less.



- a)** Determine (symbolically) the undamped angular eigenfrequency ω_u of the equivalent SDOF-system.

The undamped angular eigenfrequency ω_u is given as:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

In this case the three springs are connected in parallel and so:

$$k_{eq} = k_{beam} + k_1 + k_2 = k_1 + k_2 + \frac{3EI}{L^3}.$$

And therefore the undamped angular eigenfrequency of the system is

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + \frac{3EI}{L^3}}{m}}.$$

- b)** It is now noted that (in SI-units) $EI = 100$, $L = 1,3$, $m = 0,5$, $k_1 = k_2 = 25$, $d_0 = 0,1$ and $\dot{d}_0 = 0$. Determine the undamped eigenperiod of the equivalent SDOF-system.

Note that the connection between frequency as determined in a) and period is:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2 \cdot 25 + \frac{300}{1,3^3}}{0,5}}} = 0,33 \text{ s}.$$

- c)** Determine the maximal speed, that the equivalent SDOF-system experiences in its eigenmotion.

The displacement $d(t)$ is given as:

$$d(t) = A \cos(\omega_u t - \phi).$$

And the speed $\dot{d}(t)$ can be found simply via differentiation as

$$\dot{d}(t) = -\omega_u A \sin(\omega_u t - \phi).$$

In its maximum this is

$$\max(\dot{d}(t)) = \omega_u A.$$

We also know that:

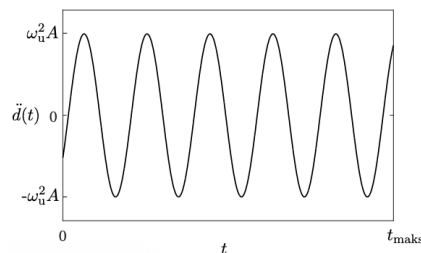
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{d_0^2 + \frac{\dot{d}_0^2}{\omega_u^2}} = d_0.$$

Therefore the maximum velocity is:

$$\max(\dot{d}(t)) = \omega_u A = \sqrt{\frac{k_1 + k_2 + \frac{3EI}{L^3}}{m}} \cdot d_0 = 1,73 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

2.2 Exercise 2.2

With reference to the following harmonic response choose the correct starting conditions.



1. $d_0 < 0 \wedge \dot{d}_0 = 0$
2. $d_0 > 0 \wedge \dot{d}_0 = 0$
3. $d_0 < 0 \wedge \dot{d}_0 > 0$
4. $d_0 > 0 \wedge \dot{d}_0 < 0$
5. $d_0 = 0 \wedge \dot{d}_0 > 0$
6. $d_0 = 0 \wedge \dot{d}_0 < 0$

The plot looks to be showing sinusoidal acceleration. In the initial case the acceleration is negative, this means that the speed here is necessarily also negative, a negative speed means that the initial displacement must have been positive, hence the correct answer is 4

2.3 Exercise 2.3

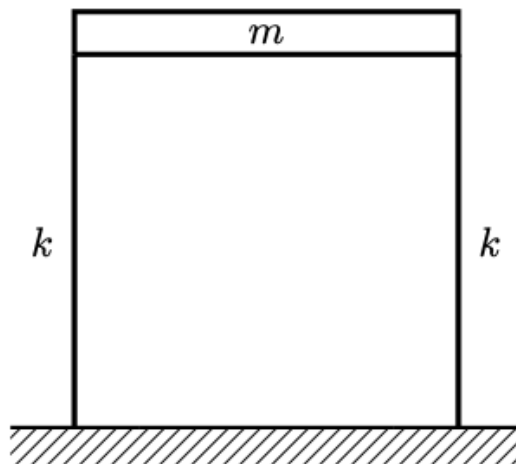
We consider the shown system, which is to be analysed as an equivalent SDOF-system, wherein the degree of freedom is horizontal movement of the horizontal beam. It is noted that the horizontal beam has mass m and is assumed to be infinitely stiff, whilst the two vertical beams are assumed massless and with stiffness k .

a) Determine (symbolically) what the undamped angular eigenfrequency ω_u of the equivalent SDOF-system is.

The two beams are connected in parallel, hence:

$$k_{eq} = 2k \implies \omega_u = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

b) It is noted that (in SI-units) $m = 3$, $k = 30$, $d_0 = -0,1$, and $\dot{d}_0 = 0,2$. Determine the initial acceleration of the equivalent SDOF-system



From Newton's second law we get:

$$m\ddot{d}(t) + kd(t) = 0 \implies m\ddot{d}_0 + k_{eq}d_0 = 0.$$

And now we can solve for $\ddot{d}_0$ as:

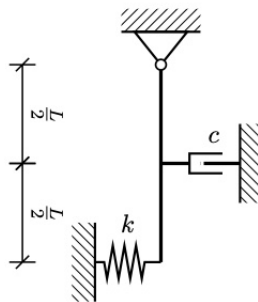
$$\ddot{d}_0 = \frac{-k_{eq}d_0}{m} = \frac{-60 \cdot (-0,1)}{3} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Lecture 3: Damping of SDOF systems

9. September 2025

3.1 Exercise 3.1

We consider the shown system, which is to be analyzed as an equivalent SDOF system with the rotation of the rod $\theta(t)$ as the degree of freedom. It is assumed that the rod is uniform, infinitely stiff, has a mass of $m = 3 \text{ kg}$, a length $L = 1,1 \text{ m}$ and does not dissipate mechanical energy. A linear-viscous damping mechanism, which is producing subcritical damping with $\xi = 0,2$ and a spring with stiffness $k = 30 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ is applied as shown. The initial conditions are $\theta_0 = 0$ and $\dot{\theta} = 0,1$.



a) Derive the equation of motion for the equivalent SDOF system under the assumption of *LTI* conditions.

We imagine the rod being displaced a little to the right at the start since $d_0 > 0$. The force the spring will exert is:

$$F_s = -kL \sin \theta.$$

And the force that the damper will exert is

$$F_c = -c \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} \sin \theta \right) = c \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta.$$

The force from gravity will be:

$$F_g = -mg \frac{L}{2} \sin \theta.$$

Now we take the moments about the support O as:

$$\begin{aligned} I_O \ddot{\theta} &= F_s + F_c + F_g \\ &= -kL \sin \theta L \cos \theta - c \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \frac{L}{2} \cos \theta - mg \frac{L}{2} \sin \theta \\ &= -kL^2 \sin \theta \cos \theta - c \frac{L^2}{4} \dot{\theta} \cos^2 \theta - mg \frac{L}{2} \sin \theta. \end{aligned}$$

Under *LTI* assumptions we set $\sin \theta \approx \theta$ and $\cos \theta \approx 1$ and get:

$$\begin{aligned} I_O \ddot{\theta} &= -kL^2 \theta - c \frac{L^2}{4} \dot{\theta} - mg \frac{L}{2} \theta \\ &= -\theta \left(kL^2 + mg \frac{L}{2} \right) - c \frac{L^2}{4} \dot{\theta} \\ \Rightarrow I_O \ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4} \dot{\theta} + \left(kL^2 + mg \frac{L}{2} \right) \theta &= 0. \end{aligned}$$

Now inserting the fact that the moment of inertia of a rod rotating about its end is $I_O = \frac{1}{3}mL^2$ we get:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4} \dot{\theta} + L \left(kL + \frac{mg}{2} \right) \theta = 0.$$

b) Determine the undamped angular eigenfrequency ω_u .

For translation we normally have that

$$\begin{aligned} m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{d}(t) + \frac{c}{m}\dot{d}(t) + \frac{k}{m}d(t) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{d}(t) + 2(\omega_d\dot{d}(t) + \omega_u^2d(t)) &= 0. \end{aligned}$$

An analogous result is applicable for rotation, the eigenfrequency is:

$$\omega_u = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_u = \sqrt{\frac{L(kL + \frac{mg}{2})}{\frac{mL^2}{3}}}.$$

This can be simplified as:

$$\begin{aligned} \omega_u &= \sqrt{\frac{3L(kL + \frac{mg}{2})}{mL^2}} \\ &= \sqrt{\frac{3kL + \frac{3mg}{2}}{mL}}. \end{aligned}$$

c) Solve the equation of motion in a) with the given initial conditions and sketch $\theta(t)$

We have the equation of motion:

$$\frac{mL^2}{3}\ddot{\theta} + \frac{cL^2}{4}\dot{\theta} + L\left(kL + \frac{mg}{2}\right)\theta = 0.$$

Now we set $m_{\text{sub}} \equiv \frac{mL^2}{3}$, $c_{\text{sub}} = \frac{cL^2}{4}$ and $k_{\text{sub}} = L\left(kL + \frac{mg}{2}\right)$. Then

$$m_{\text{sub}}\ddot{\theta} + c_{\text{sub}}\dot{\theta} + k_{\text{sub}}\theta = 0.$$

The solution of this for undercritical damping is:

$$d(t) = e^{-\xi\omega_u t} (A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)).$$

Where $\omega_d \equiv \omega_u \sqrt{1 - \xi^2}$ and $\xi = \frac{c_{\text{sub}}}{2m_{\text{sub}}\omega_u}$. We can find an expression for ξ as

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c_{\text{sub}}}{2m_{\text{sub}}\omega_u} \\ &= \frac{\frac{cL^2}{4}}{\frac{2mL^2}{3}\omega_u} \\ &= \frac{3c}{8m\omega_u}. \end{aligned}$$

We have $\theta_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0,1$ so

$$\theta_0 = 0 = A_1.$$

As such we can find:

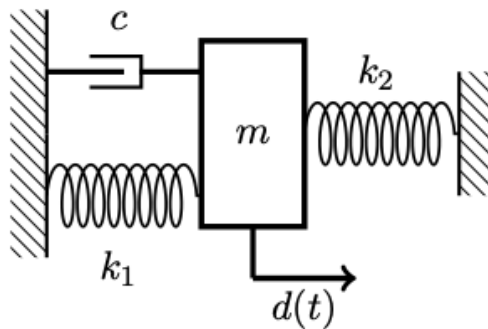
$$\begin{aligned} \theta(t) &= A_2 e^{-\xi\omega_u t} \sin(\omega_d t) \\ \Rightarrow \dot{\theta}(t) &= -\xi\omega_u A_2 e^{-\xi\omega_u t} \sin(\omega_d t) + \omega_d A_2 e^{-\xi\omega_u t} \cos(\omega_d t) \\ \Rightarrow \dot{\theta}_0 &= \omega_d A_2 \\ \Rightarrow A_2 &= \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d}. \end{aligned}$$

Therefore the solution is:

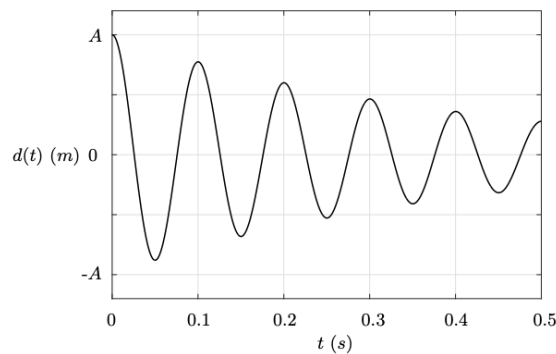
$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d} e^{-\xi\omega_u t} \sin(\omega_d t).$$

3.2 Exercise 3.2

We consider the shown mass-spring-damper system. Numerical values for the relevant physical parameters will be derived or provided during the exercise. I.e. avoid assuming any numerical values.



In an eigenmotion experiment with $d_0 > 0$ and $\dot{d}_0 = 0$ the movements shown underneath are created in the system. It is noted that the movement amplitude is reduced by 40% after two damped eigenperiods.



a) Determine the damping ratio ξ and determine if the system is undercritically damped, critically damped or overcritically damped.

The dampening ratio δ is defined as

$$\delta \equiv \frac{1}{j} \log \left(\frac{d(t)}{d(t + jT_d)} \right).$$

Where $j \in \mathbb{N}_{>0}$ is chosen such that $t + jT_d$ is the time j damped eigenperiods after t , where each eigenperiod is T_d . In this case we have:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{d(t)}{\frac{3}{5}d(t)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} \\ &= 0,268. \end{aligned}$$

Hence:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2}} = \frac{0,268}{\sqrt{0,268^2 + 4\pi^2}} = 0,042.$$

Hence the system is undercritically damped.

b) Determine the damped angular eigenfrequency ω_d . (hint: look at the movement graph).

From the plot we see that $T_d = 0,1$ s, hence:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 20\pi \text{ s}^{-1}.$$

c) Determine the undamped angular eigenfrequency ω_u .

Here we have:

$$\omega_u = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{20\pi \text{ s}^{-1}}{\sqrt{1 - 0,042^2}} \approx 62,9 \text{ s}^{-1}.$$

d) It is noted that $m = 2,2$ kg and $k_1 = 3000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Determine k_2 .

We know that:

$$k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$$

as the springs are connected in parallel. We have that:

$$\omega_u^2 = \frac{k_{\text{eq}}}{m} = \frac{k_1 + k_2}{m} \implies k_2 = \omega_u^2 m - k_1.$$

Plugging in known values we get:

$$k_2 = (62,9 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 2,2 \text{ kg} - 3000 \frac{\text{N}}{\text{m}} = 5,7 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

Lecture 4: Tvungen svingning af SDOF-systemer (del I)

16. September 2025

Problem 4.1

Bevis ved brug af “ubestemte koefficienters”-metoden, at den partikulære løsning for et SDOF-system med masse m , dæmpning c og stivhed k , der er påvirket af en harmonisk last med amplitude F_0 og frekvens Ω , er givet ved

$$d_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + c^2\Omega^2}} \cos\left(\Omega t - \tan^{-1}\left(\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right)\right).$$

Derivation

Den generelle formel for tvungen svingning af et SDOF-system er

$$m\ddot{d}(t) + c\dot{d}(t) + kd(t) = F(t).$$

Fra ubestemte koefficienters metode har vi flg. partikulære løsning:

$$d_p(t) = B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t).$$

Ved indsættelse af den partikulære løsning og den drivende kraft $F = F_0 \cos(\Omega t)$ fås:

$$\begin{aligned} & m(-\Omega^2 B_1 \cos(\Omega t) - \Omega^2 B_2 \sin(\Omega t)) \\ & + c(-\Omega B_1 \sin(\Omega t) + \Omega B_2 \cos(\Omega t)) \\ & + k(B_1 \cos(\Omega t) + B_2 \sin(\Omega t)) = F_0 \cos(\Omega t) \\ \implies & (c\Omega B_2 + kB_1 - \Omega^2 m B_1) \cos(\Omega t) \\ & + (B_2 k - \Omega c B_1 - \Omega^2 m B_2) \sin(\Omega t) = F_0 \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Vi lader nu $n \in \mathbb{N}_0$, da gælder at:

$$\forall \Omega t = 2n\pi: \quad \sin(\Omega t) = 0, \quad \cos(\Omega t) = 1.$$

Da får vi ved indsættelse i udtrykket fra før:

$$c\Omega B_2 + (k - \Omega^2 m) B_1 = F_0. \tag{0.1}$$

Lader vi i stedet $m \in \mathbb{N}_0$, så:

$$\forall \Omega t = 2m\pi + \frac{\pi}{2}: \quad \sin(\Omega t) = 1, \quad \cos(\Omega t) = 0.$$

Da får vi

$$\begin{aligned}(k - \Omega^2 m) B_2 - \Omega c B_1 &= 0 \\ \Rightarrow B_2 &= \frac{\Omega c B_1}{k - \Omega^2 m}\end{aligned}\tag{0.2}$$

Ved indsættelse af Equation (0.2) i Equation (0.1) fås:

$$\begin{aligned}\frac{\Omega^2 c^2 B_1}{k - \Omega^2 m} + (k - \Omega^2 m) B_1 &= F_0 \\ \Omega^2 c^2 B_1 + (k - \Omega^2 m)^2 B_1 &= F_0 (k - \Omega^2 m) \\ (\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2) B_1 &= F_0 (k - \Omega^2 m) \\ B_1 &= \frac{F_0 (k - \Omega^2 m)}{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}.\end{aligned}$$

Fra Equation (0.2) får vi da at

$$\begin{aligned}B_2 &= \frac{\Omega c F_0 (k - \Omega^2 m)}{(k - \Omega^2 m) (\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)} \\ &= \frac{\Omega c F_0}{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}.\end{aligned}$$

Fra definitionen af $B \equiv \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ fås

$$\begin{aligned}B &= \sqrt{\left(\frac{F_0 (k - \Omega^2 m)}{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}\right)^2 + \left(\frac{\Omega c F_0}{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{F_0^2 (k - \Omega^2 m)^2}{(\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)^2} + \frac{\Omega^2 c^2 F_0^2}{(\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{F_0^2 (k - \Omega^2 m)^2 + \Omega^2 c^2 F_0^2}{(\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{F_0^2 (\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)}{(\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2)^2}} \\ &= \frac{F_0}{\sqrt{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}}.\end{aligned}$$

Dermed er det vist at den rigtige faktor B er angivet i opgaven. Nu mangler vi blot at vise at fasevinklen $\epsilon = \tan^{-1}(c\Omega/(k - m\Omega^2))$ også er korrekt. Denne er defineret som $\epsilon = \tan^{-1}(B_2/B_1)$. Ved indsættelse fås:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \tan^{-1}\left(\frac{\Omega c F_0}{F_0 (k - \Omega^2 m)}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{\Omega c}{k - \Omega^2 m}\right).\end{aligned}$$

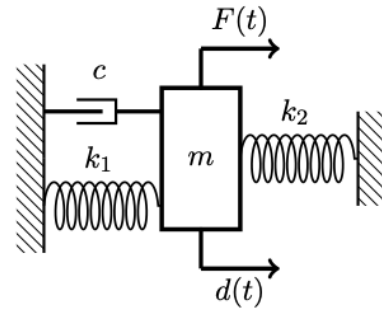
Dermed er det vist.

$$\begin{aligned}B &= \frac{F_0}{\sqrt{\Omega^2 c^2 + (k - \Omega^2 m)^2}} \\ \epsilon &= \tan^{-1}\left(\frac{\Omega c}{k - \Omega^2 m}\right).\end{aligned}$$

RESULT

Problem 4.2

Vi returnerer til systemet behandlet i opgave 3.2 (se forrige lektion), som nu påføres en harmonisk last. Denne last er givet ved $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$, hvor $F_0 = 1 \text{ kN}$, mens Ω ønskes bestemt. I denne forbindelse oplyses det, at fasevinklen i den stationære svingning er lig 90° . a) Bestem lastfrekvensen, Ω . b) Bestem flytningsamplituden i den stationære svingning, B . c) Bestem den dynamiske forstærkningsfaktor, D .



Derivation

Eftersom Fasevinklen i den stationære svingning er 90° har vi $\tan 90^\circ \rightarrow \infty \Rightarrow p = 1 \Rightarrow \Omega = \omega_u = 62,9 \text{ s}^{-1}$.

Eftersom $p = 1$ har vi

$$\begin{aligned} D \equiv \frac{Bk}{F_0} &= \frac{1}{\sqrt{(1-p^2)^2 + 4\xi^2 p^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\xi^2}} \\ &= \frac{1}{2\xi} \\ \Rightarrow B &= \frac{F_0}{2\xi k_{\text{eq}}}. \end{aligned}$$

Hvor $k_{\text{eq}} = k_1 + k_2$ og ξ er fundet/givet i opgave 3.2. Dermed er $D = \frac{1}{2\xi}$ også fundet.

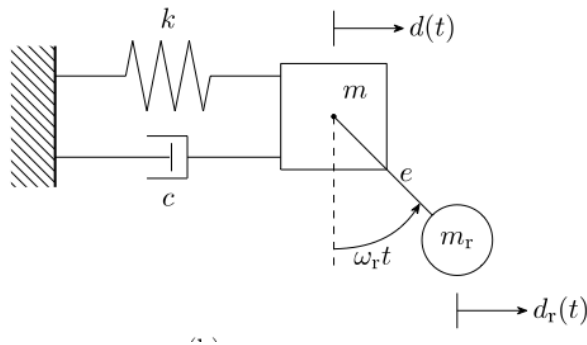
a)	$\Omega = \omega_u = 62,9 \text{ s}^{-1}$
b)	$B = \frac{F_0}{2\xi k_{\text{eq}}}$
c)	$D = \frac{1}{2\xi}$

RESULT

Problem 4.3

Bevis, at den styrende bevægelsesligning for SDOF-systemet skitseret på figur 3.6b i forelæsningsnoterne kan formuleres som

$$(m + m_r) \ddot{d}(t) + c \dot{d}(t) + kd(t) = m_r \omega_r^2 e \sin(\omega_r t).$$



Figur 0.3: SDOF-systemet fra figur 3.6b i forelæsningen.

Derivation

Fra Newtons anden lov fås

$$m \ddot{d}(t) + m_r \ddot{d}_r(t) = -c \dot{d}(t) - kd(t).$$

$d_r(t)$ kan også skrives som

$$d_r(t) = d(t) + e \sin(\omega_r t).$$

Dermed har vi

$$\ddot{d}_r(t) = \ddot{d}(t) - \omega_r^2 e \sin(\omega_r t).$$

Ved indsættelse af dette i Newtons 2. lov får vi

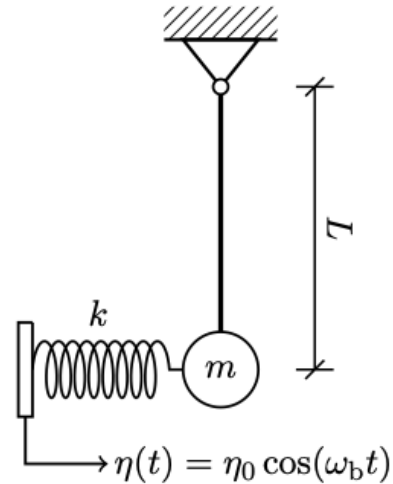
$$\begin{aligned} m \ddot{d}(t) + m_r (\ddot{d}(t) - \omega_r^2 e \sin(\omega_r t)) + c \dot{d}(t) + kd(t) &= 0 \\ (m + m_r) \ddot{d}(t) + c \dot{d}(t) + kd(t) &= m_r \omega_r^2 e \sin(\omega_r t). \end{aligned}$$

$$(m + m_r) \ddot{d}(t) + c \dot{d}(t) + kd(t) = m_r \omega_r^2 e \sin(\omega_r t)$$

RESULT

Problem 4.4

Vi betragter det skitserede pendulsystem og antager, at stangen er uendelig stiv, uniform, masseløs og uden dæmpning. En bevægelig understøtning virker, som skitseret, med $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega_b t)$. Systemet skal modelleres som et SDOF-system med frihedsgraden værende rotation af stangen, $\theta(t)$. a) Udled bevægelsesligningen for $\theta(t)$ under antagelsen om LTI-betingelser. b) Bestem (symbolsk) den udæmpede vinkelegenfrekvens, ω_u .



Derivation

Momentet omkring stangen (idet den roteres en lille vinkel θ væk fra fjederen) giver

$$I\ddot{\theta} = -k(L\sin\theta - \eta)L\cos\theta - mgL\sin\theta.$$

Vi bruger $\cos\theta \approx 1$ og $\sin\theta \approx \theta$ og får

$$I\ddot{\theta} = -k(L\theta - \eta)L - mgL\theta.$$

$\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega_b t)$ er givet i opgaven, hvorfor

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= -k(L\theta - \eta_0 \cos(\omega_b t))L - mgL\theta \\ I\ddot{\theta} + (kL^2 + mgL)\theta &= kL\eta_0 \cos(\omega_b t). \end{aligned}$$

For en stiv stang der roterer om enden er $I = mL^2$ og vi får derfor

$$mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 + mgL)\theta = kL\eta_0 \cos(\omega_b t).$$

For at bestemme den udæmpede vinkelegenfrekvens bruger vi blot

$$\begin{aligned} \omega_u &= \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} \\ &= \sqrt{\frac{kL^2 + mgL}{mL^2}} \\ &= \sqrt{\frac{kL + mg}{mL}}. \end{aligned}$$

a) $mL^2\ddot{\theta} + (kL^2 + mgL)\theta = kL\eta_0 \cos(\omega_b t)$ b) $\omega_u = \sqrt{\frac{kL + mg}{mL}}.$

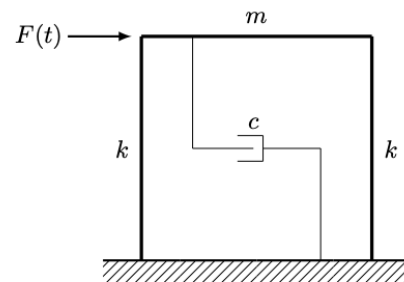
RESULT

Lecture 5: Tvungen svingning af SDOF-systemer (del II)

23. September 2025

Problem 5.1

Vi betragter den viste rammestruktur, der er påført begyndelsesbetingelserne $d_0 \neq 0$ og $\dot{d}_0 \neq 0$ og er belastet af en enhedssteplast, som aktiveres ved $t_1 > 0$. Det oplyses, at den tværgående bjælke har massen m og er uendelig stiv, mens hver søjle har stivheden k og er masseløs. Rammestrukturen ønskes beskrevet som et SDOF-system, hvori den horisontale flytning af tværbjælken er frihedsgraden. Dæmpningsmekanismen yder underkritisk dæmpning. a) Bestem den ækvivalente masse, ækvivalente stivhed og ækvivalente dæmpning. b) Bestem systemets flytningsrespons. c) Bestem det stationære flytningsrespons. d) Bestem det stationære hastighedsrespons.



Derivation

Vi kan betragte systemet som en masse påvirket af en last, holdt fast af to parallelforbundne fjedre og med dæmpning i både positiv og negativ bevægelsesretning. Dæmpningen ovenfor er blot $c_{eq} = c$, de parallelforbundne fjedre har en ækvivalent fjederkonstant på $k_{eq} = 2k$ og en ækvivalent masse på m .

Vi har den generelle løsning

$$d(t) = d_h(t) + d_p(t).$$

Idet der er underkritisk dæmpning har vi $\xi \in (0, 1)$. Hvilket giver den homogene løsning

$$d_h(t) = Ae^{-\xi\omega_u t} \cos(\omega_d t - \psi).$$

Vha. Duhamels integrale fås

$$\begin{aligned} d_p(t) &= \int_{t_1}^t H(t-\tau) F(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_1}^t \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_u(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) \cdot 1 d\tau \\ &= \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_u t} \int_{t_1}^t e^{\xi\omega_u \tau} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Vi kan nu løse integralet som

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t e^{\xi\omega_u \tau} \sin(\omega_d(t-\tau)) d\tau &= \frac{1}{\omega_d^2 + \xi^2\omega_u^2} \left[e^{\xi\omega_u \tau} (\omega_d \cos(\omega_d(t-\tau)) + \xi\omega_u \sin(\omega_d(t-\tau))) \right]_{t_1}^t \\ &= \frac{1}{\omega_u^2} \left(\omega_d e^{\xi\omega_u t} - \omega_d e^{\xi\omega_u t_1} \cos(\omega_d(t-t_1)) - \xi\omega_u e^{\xi\omega_u t_1} \sin(\omega_d(t-t_1)) \right) \\ &= \frac{1}{\omega_u^2} \left(\omega_d e^{\xi\omega_u t} - B e^{\xi\omega_u t_1} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon) \right). \end{aligned}$$

Hvor $B = \sqrt{\omega_d^2 + \xi^2\omega_u^2} = \omega_u$ og $\epsilon = \tan^{-1}(\xi/\sqrt{1-\xi^2})$.

Ved indsættelse af dette i Duhamels integrale fås:

$$\begin{aligned} d_p(t) &= \frac{e^{-\xi\omega_u t}}{m\omega_d\omega_u^2} \cdot \left(\omega_d e^{\xi\omega_u t} - e^{\xi\omega_u t_1} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon) \right) \\ &= \frac{\omega_d}{m\omega_d\omega_u^2} - \frac{e^{-\omega_u \xi(t-t_1)}}{m\omega_d\omega_u} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k_{\text{eq}}} - \frac{1}{m\omega_u^2\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_u(t-t_1)} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon) \\
 &= \frac{1}{k_{\text{eq}}} - \frac{1}{k_{\text{eq}}\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_u(t-t_1)} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon).
 \end{aligned}$$

Dermed bliver vores totale løsning:

$$d(t) = Ae^{-\xi\omega_u t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{1}{k_{\text{eq}}} - \frac{1}{k_{\text{eq}}\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_u(t-t_1)} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon).$$

For $t \rightarrow \infty$ ses at $d \rightarrow \frac{1}{k_{\text{eq}}}$ hvilket derfor er den stationære flytningsrespons.

For $t \rightarrow \infty$ fås $\dot{d} \rightarrow 0$ hvilket da er den stationære hastighedsrespons.

- a) $c_{\text{eq}} = c, m_{\text{eq}} = m, k_{\text{eq}} = 2k$

b) $d(t) = Ae^{-\xi\omega_u t} \cos(\omega_d t - \psi) + \frac{1}{k_{\text{eq}}} - \frac{1}{k_{\text{eq}}\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_u(t-t_1)} \cos(\omega_d(t-t_1) - \epsilon)$

c) $\frac{1}{k_{\text{eq}}}$

d) 0.

RESULT

Lecture 6: Fri svingning/egensvingning af MDOF-systemer (del I)

21. Oktober 2025

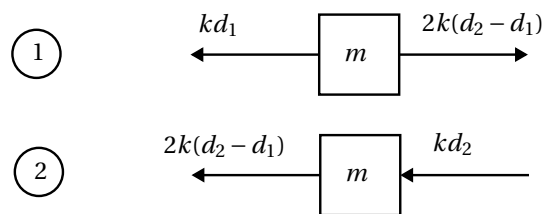
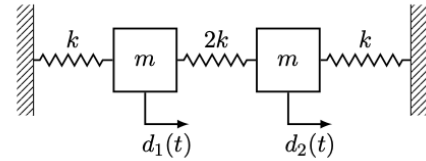
Problem 6.1

Vi betragter det viste masse-fjeder-system, der skal analyseres som et system med to frihedsgrader; navnlig $d_1(t)$ og $d_2(t)$.

a) Opstil masse- og stivhedsmatricen for systemet. b) Bevis, at systemets udæmpede vinkelegensfrekvenser er givet ved

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{5}\omega_1.$$

c) Bestem de tilhørende egensvingningsformer/-vektorer, ϕ_1 og ϕ_2 .



Figur 0.4: Frit-legeme diagram for de to masser i systemet.

Derivation

På [Figure 0.4](#) ses et frit-legeme diagram for hver af de to masser i systemet. På baggrund af dette kan Newtons 2. lov benyttes for først den første masse, som

$$\begin{aligned} m\ddot{d}_1(t) &= -kd_1 + 2k(d_2 - d_1) \\ &= 2kd_2 - 3kd_1 \\ \Rightarrow m\ddot{d}_1(t) + 3kd_1 - 2kd_2 &= 0. \end{aligned}$$

Og dernæst for den anden masse, som

$$\begin{aligned} m\ddot{d}_2(t) &= -2k(d_2 - d_1) - kd_2 \\ &= 2kd_1 - 3kd_2 \\ \Rightarrow m\ddot{d}_2(t) + 3kd_2 - 2kd_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dermed har vi de to ligninger

$$\begin{aligned} m\ddot{d}_1(t) + 3kd_1 - 2kd_2 &= 0 \\ m\ddot{d}_2(t) + 3kd_2 - 2kd_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dette giver systemet

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Heraf ses at masse- og stivhedsmatricerne er hhv.

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix}.$$

Vi har at den udæmpede vinkelegenfrekvens ω kan findes ved

$$\det(K - \omega^2 M) = 0.$$

Ved indsættelse fås

$$\det \left(\begin{bmatrix} 3k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 3k - \omega^2 m \end{bmatrix} \right) = (3k - \omega^2 m)^2 - 4k^2 = 0.$$

De positive løsninger for ω af denne er hhv.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{5}\omega_1.$$

Altså er det vist.

For hver af disse 2 udæmpede vinkelegenfrekvenser findes en egenvektor ϕ_j givet ved

$$(K - \omega_j^2 M) \phi_j = 0.$$

For $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ fås

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} 3k - \frac{k}{m}m & -2k \\ -2k & 3k - \frac{k}{m}m \end{bmatrix} \phi_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{bmatrix} \\ &= 2k(\phi_{11} - \phi_{21}) \\ \Rightarrow \quad \phi_{11} &= \phi_{21}. \end{aligned}$$

Hvis vi lader $\phi_{11} = 1$ så $\phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. For $\omega_2 = \sqrt{5}\omega_1$ får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{bmatrix} 3k - 5\frac{k}{m}m & -2k \\ -2k & 3k - 5\frac{k}{m}m \end{bmatrix} \phi_2 \\ &= \begin{bmatrix} -2k & -2k \\ -2k & -2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} \\ &= -2k(\phi_{12} + \phi_{22}) \\ \Rightarrow \quad \phi_{12} &= -\phi_{22}. \end{aligned}$$

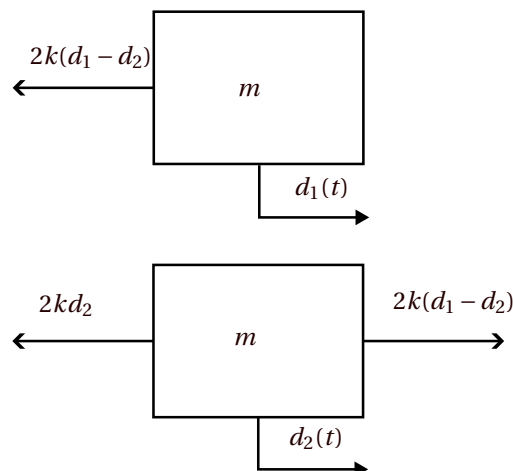
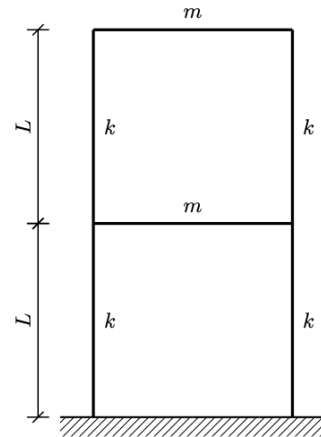
Vi lader $\phi_{12} = 1$ så $\phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{array}{l} \text{a) } M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix} \\ \text{b) } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{5}\omega_1 \\ \text{c) } \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

RESULT

Problem 6.2

Vi betragter det viste rammesystem, hvori de horisontale/tværgående bjælker er uendeligt stive og hver har massen $m = 1,5 \text{ kg}$, mens de vertikale bjælker er masseløse og hver har længden $L = \sqrt[3]{1,2} \text{ m}$ og stivheden $k = \frac{12EI}{L^3} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ med $EI = 10 \text{ N m}^2$. Systemet skal modelleres som et system med to frihedsgrader, hvor den første frihedsgrad, $d_1(t)$, er den horisontale flytning af den øverste tværgående bjælke, mens den anden frihedsgrad, $d_2(t)$, er den horisontale flytning af den nederste tværgående bjælke. Begyndelsesbetingelserne $d_0 = \phi_2$ og $\dot{d}_0 = 0$ påføres, hvortil det bemærkes, at ϕ_2 er den anden egensvingningsform. a) Opstil stivheds- og massematricen for systemet. b) Bestem systemets udæmpede vinkelegenfrekvenser, ω_j , og de tilhørende egensvingningsformer, ϕ_j . c) Bestem $d_1(t)$ og $d_2(t)$.



Figur 0.5: Frit-legeme diagram for systemet

Derivation

Systemet kan betragtes som vist på Figure 0.5. Benyttes Newtons 2. lov for den første masse fås:

$$m\ddot{d}_1(t) = -2k(d_1 - d_2)$$

$$\Rightarrow m\ddot{d}_1(t) + 2kd_1 - 2kd_2 = 0.$$

Gøres det samme for den anden masse fås:

$$m\ddot{d}_2(t) = 2k(d_1 - d_2) - 2kd_2$$

$$\Rightarrow m\ddot{d}_2(t) + 4d_2k - 2d_1k = 0.$$

Dermed har vi ligningerne:

$$m\ddot{d}_1(t) + 2kd_1 - 2kd_2 = 0$$

$$m\ddot{d}_2(t) + 4d_2k - 2d_1k = 0.$$

Hvilket giver systemet:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1(t) \\ \ddot{d}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 4k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dermed er masse- og stivhedsmatricerne hhv:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 4k \end{bmatrix} = 2k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{24EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 400 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Den udæmpede vinkelegensfrekvens ω kan findes ved

$$\det(K - \omega^2 M) = 0.$$

Ved indsættelse fås

$$\begin{aligned} 0 &= \det \left(\begin{bmatrix} 200 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \omega^2 \cdot 1,5 \text{ kg} & -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \\ -200 \frac{\text{N}}{\text{m}} & 400 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \omega^2 \cdot 1,5 \text{ kg} \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(200 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \omega^2 \cdot 1,5 \text{ kg} \right) \left(400 \frac{\text{N}}{\text{m}} - \omega^2 \cdot 1,5 \text{ kg} \right) - \left(-200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \left(-200 \frac{\text{N}}{\text{m}} \right) \\ \Rightarrow \quad \omega_1 &= 7,14 \text{ s}^{-1} \quad \omega_2 = 18,7 \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Her kan vi nu løse

$$(K - \omega_j^2 M) \phi_j = 0.$$

Vi får hhv.

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} -0,618 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} 1,62 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har den generelle løsningsformel:

$$d(t) = \phi_1 \left(A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t) + A_1^{(2)} \sin(\omega_1 t) \right) + \phi_2 \left(A_2^{(1)} \cos(\omega_2 t) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t) \right).$$

Begyndelsesbetingelsen $d_0 = \phi_2$ giver os

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \phi_1 A_1^{(1)} + \phi_2 A_2^{(1)} \\ \Rightarrow \quad A_1^{(1)} &= 0, \quad A_2^{(1)} = 1. \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$d(t) = \phi_1 A_1^{(2)} \sin(\omega_1 t) + \phi_2 \left(\cos(\omega_2 t) + A_2^{(2)} \sin(\omega_2 t) \right).$$

Vi differentierer dette for at få

$$\dot{d}(t) = \omega_1 \phi_1 A_1^{(2)} \cos(\omega_1 t) + \phi_2 \left(-\omega_2 \sin(\omega_2 t) + \omega_2 A_2^{(2)} \cos(\omega_2 t) \right).$$

Ved indsættelse af vores begyndelsesbetingelse, $\dot{d}_0 = 0$ fås

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_1 \phi_1 A_1^{(2)} + \phi_2 \omega_2 A_2^{(2)} \\ \Rightarrow \quad A_1^{(2)} &= A_2^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Dermed fås:

$$d(t) = \phi_2 \cos(\omega_2 t).$$

Hvilket svarer til systemet

$$d(t) = \begin{bmatrix} 1,62 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(18,7 \text{ s}^{-1} \cdot t).$$

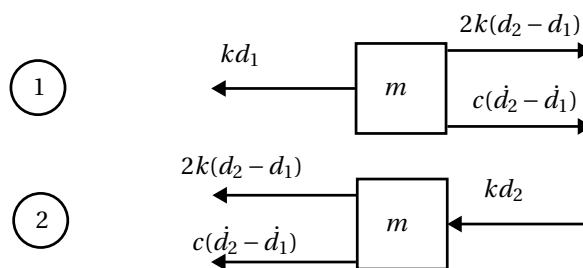
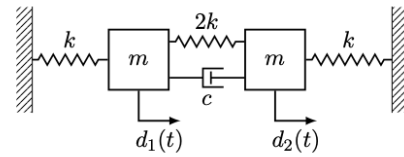
a) $M = \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \text{ kg}, \quad K = \begin{bmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 400 \end{bmatrix} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ b) $\omega_1 = 7,14 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_2 = 18,7 \text{ s}^{-1}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} -0,618 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1,62 \\ 0 \end{bmatrix}$ c) $d(t) = \begin{bmatrix} 1,62 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(18,7 \text{ s}^{-1} \cdot t).$	RESULT
---	---------------

Lecture 7: Fri svingning/egensvingning af MDOF-systemer (del II)

28. Oktober 2025

Problem 7.1

Vi returnerer til systemet behandlet i opgave 6.1 og tilføjer en dæmpningsmekanisme som vist. Bevis, at dæmpningen er klassisk.



Figur 0.6: Free body diagram of the system

Derivation

Baseret på Figure 0.6 kan Newtons 2. lov anvendes som

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{d}_1 &= 2kd_2 - 3kd_1 + c(\dot{d}_2 - \dot{d}_1) \\ m \cdot \ddot{d}_1 + 3kd_1 - 2kd_2 + c\dot{d}_1 - c\dot{d}_2 &= 0 \\ m \cdot \ddot{d}_2 &= -3kd_2 + 2kd_1 - c(\dot{d}_2 - \dot{d}_1) \\ m \cdot \ddot{d}_2 - 2kd_1 + 3kd_2 + c\dot{d}_2 - c\dot{d}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ -2k & 3k \end{bmatrix}.$$

Fra Opgave 6.1 har vi at $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ Desuden har vi $\tilde{C}$ givet som

$$\tilde{C} \equiv \Phi^T C \Phi.$$

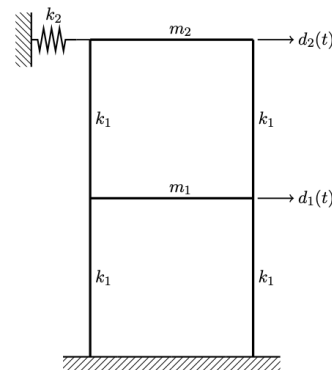
Dermed er $\tilde{C}$:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4c \end{bmatrix}.$$

Eftersom $\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4c \end{bmatrix}$ er diagonal må der derfor være tale om klassisk dæmpning.

Problem 7.2

Vi betragter det viste rammesystem. Heri gælder det, at de horisontale bjælker er uendeligt stive og har masserne m_1 og m_2 , mens de vertikale bjælker (også kaldet søjler) er fleksible (alle med stivheden k_1) og masseløse. En fjeder med stivheden k_2 er påsat den øverste horisontale bjælke. Systemet modelleres som et 2DOF-system, hvori den første frihedsgrad, $d_1(t)$, er den horisontale flytning af den nederste horisontale bjælke, mens den anden frihedsgrad, $d_2(t)$, er den horisontale flytning af den øverste horisontale bjælke. Det oplyses, at de udæmpede vinkelegnefrekvenser og de tilhørende masse-normaliserede egenvektorer af 2DOF-systemet er



$$\omega_1 = \sqrt{200} \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = \sqrt{600} \text{ rad/s}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

a) Bestem værdierne for k_1 og k_2 .

b) Bestem værdierne for m_1 og m_2 .

Hvad angår 2DOF-systemet, så oplyses begyndelsesbetingelserne $d_0 = \begin{pmatrix} 0, 1 \\ 0, 2 \end{pmatrix}^T$ og $\dot{d}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$. Endvidere oplyses det, at systemet er klassisk dæmpet med de modale dæmpningskonstanter $\tilde{c}_{11} = 8$ og $\tilde{c}_{22} = 10$.

c) Bestem dæmpningsmatricen, $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

d) Bestem begyndelsesaccelerationsvektoren, $\ddot{d}_0$.

Derivation

Vi har fået givet to egenfrekvenser og de dertilhørende egenvektorer. Vi har altså:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 200 \text{ s}^{-1} & 0 \\ 0 & 600 \text{ s}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = I.$$

Fra undervisningen har vi at siden vi generelt har

$$\Phi^T K \Phi = \Phi^T M \Phi \Lambda$$

så medfører $\tilde{M} = I$ at $\tilde{K} = \Lambda$. $\tilde{K}$ er givet som:

$$\tilde{K} \equiv \Phi^T K \Phi.$$

Altså:

$$\begin{aligned} \tilde{K} &= \Phi^T K \Phi \\ K &= (\Phi^T)^{-1} \tilde{K} \Phi^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har

$$K = \begin{bmatrix} 4k_1 & -2k_1 \\ -2k_1 & 2k_1 + k_2 \end{bmatrix} \implies k_1 = 50, k_2 = 100.$$

Samme procedure kan følges for masserne. Siden $\tilde{M} = I$ fås:

$$\begin{aligned}\tilde{M} &= \Phi^T M \Phi \\ M &= (\Phi^T)^{-1} \Phi \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dermed har vi $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$.

Udnyttes samme teknik for dæmpningsmatricen får vi

$$\begin{aligned}\tilde{C} &= \Phi^T C \Phi \\ C &= (\Phi^T)^{-1} \tilde{C} \Phi^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

For at bestemme $\ddot{d}_0$ benytter vi den generelle formel

$$\begin{aligned}M\ddot{d}_0 + C\dot{d}_0 + Kd_0 &= 0 \\ \ddot{d}_0 &= -M^{-1}(C\dot{d}_0 + Kd_0) \\ &= -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 200 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

a)	$k_1 = 50, k_2 = 100$
b)	$m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$
c)	$C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$
d)	$\ddot{d}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -60 \end{bmatrix}.$

RESULT

Lecture 8: Fri svingning/egensvingning af MDOF-systemer (del III)

4. November 2025

Problem 8.1

Vi returnerer til systemet behandlet i Opgave 7.1. Bevis, at dæmpningsforholdene er givet som

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{c}{m\omega_2}.$$

Derivation

Fra forelæsningsen har vi at $\tilde{C}$ er givet som

$$\tilde{C}_{jj} = 2\xi_j \tilde{m}_{jj} \omega_j.$$

Heri kan dæmpningsforholdet ξ_j isoleres som

$$\xi_j = \frac{\tilde{C}_{jj}}{2\tilde{M}_{jj}\omega_j}.$$

Hvori $\tilde{C}$ er fundet i opgave 7.1 til

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4c \end{bmatrix}.$$

Fra Opgave 6.1 har vi hhv:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{5}\omega_1.$$

De modale masser bestemmes som

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \Phi^T M \Phi \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 2m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dermed har vi at $\tilde{M}_{11} = \tilde{M}_{22} = 2m$, hvorfor vi får:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{0}{2 \cdot 2m \cdot \omega_1} = 0 \\ \xi_2 &= \frac{4c}{2 \cdot 2m \cdot \omega_2} = \frac{c}{m\omega_2}. \end{aligned}$$

RESULT

Problem 8.2

Et eksperiment har—under antagelsen om klassisk dæmpning—resulteret i de nedenfor viste egenverdier (og deres komplekst konjugerede), der ligger på en ret linje fra origo. Det oplyses, at $\lambda_1 = -0,900 + 8,96i$ og $\lambda_2 = -2,63 + 26,1i$. (a) Bestem de fem dæmpningsforhold.

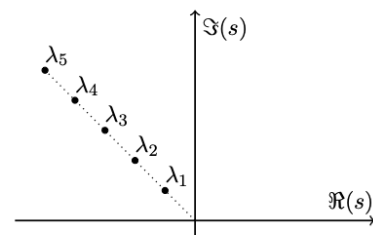
(b) Bestem de to første udæmpede vinkellegfrekvenser.

Det oplyses nu, at

$$K = 1000 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = I.$$

(c) Bestem dæmpningsmatricen, $C \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, ved brug af Rayleighs dæmpningsmodel baseret på de to første egensvingningskonfigurationer.

(d) Hvor store fejl yder Rayleighs dæmpningsmodel på ξ_3, ξ_4 og ξ_5 ?



Derivation

Fra Forelæsning 7 har vi at der for klassisk dæmpning gælder at:

$$\{\lambda_j, \lambda_{j+n}\} = -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}, \text{ hvor } \xi_j \equiv \frac{\tilde{C}_{jj}}{2\tilde{M}_{jj}\omega_j} \text{ for } \omega_j > 0.$$

Heraf ses at hældningen på den rette linje der går igennem alle egenverdierne er

$$m = \frac{\Im(\lambda_j)}{\Re(\lambda_j)} = \frac{\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}}{-\xi_j \omega_j} = -\frac{\sqrt{1 - \xi_j^2}}{\xi_j} \quad (0.3)$$

Her ses at hældningen udelukkende afhænger af dæmpningsforholdet. Idet hældningen er konstant må dæmpningsforholdene ligeledes være konstante

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5.$$

I Equation (0.3) kan dæmpningsforholdet isoleres som:

$$\begin{aligned} m\xi_j &= \sqrt{1 - \xi_j^2} \\ m^2 \xi_j^2 &= 1 - \xi_j^2 \\ m^2 \xi_j^2 + \xi_j^2 &= 1 \\ \xi_j^2 (m^2 + 1) &= 1 \\ \xi_j &= \sqrt{\frac{1}{m^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\Im(\lambda_j)}{\Re(\lambda_j)}\right)^2 + 1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{8,96}{-0,900}\right)^2 + 1}} \\ &= 0,1.\end{aligned}$$

Vinkelegenfrekvenserne kan findes ud fra λ -værdierne som:

$$\begin{aligned}\lambda_j &= -\xi_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \\ |\lambda| &= \sqrt{(-\xi_j \omega_j)^2 \pm (i \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2})^2} \\ &= \sqrt{\xi_j^2 \omega_j^2 + \omega_j^2 - \xi_j^2 \omega_j^2} \\ &= \omega_j.\end{aligned}$$

Altså kan den j 'te vinkelegenfrekvens findes som længden af den j 'te komplekse egen værdi som

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{0,9^2 + 8,96^2} = 9,01 \\ \omega_2 &= \sqrt{2,63^2 + 26,1^2} = 26,2.\end{aligned}$$

Rayleighs dæmpningsmodel foreskriver at:

$$C = \alpha M + \beta K$$

hvor M og K i dette tilfælde er givet. Vi kan skrive:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & \frac{\omega_1}{2} \\ \frac{1}{2\omega_2} & \frac{\omega_2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\omega_1} & \frac{\omega_1}{2} \\ \frac{1}{2\omega_2} & \frac{\omega_2}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2 \cdot 9,01} & \frac{9,01}{2} \\ \frac{1}{2 \cdot 26,2} & \frac{26,2}{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1,34 \\ 0,006 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dermed får vi altså:

$$C = 1,34M + 0,006K \approx \begin{bmatrix} 13,3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 13,3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 13,3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 13,3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 7,34 \end{bmatrix}.$$

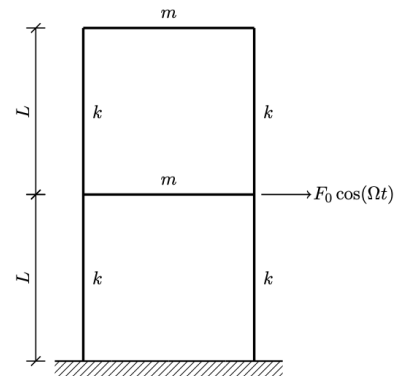
Lecture 9: Tvungen Svinging af MDOF-systemer (del I)

11. November 2025

Problem 9.1

Vi returnerer til rammesystemet behandlet i opgave 6.2 og tilføjer klassisk dæmpning med $\xi_1 = \xi_2 = 0,05$. Systemet påføres, som vist, en harmonisk kraft, hvortil det bemærkes, at $F_0 = 4\text{ N}$ og $\Omega = 5,5\text{ s}^{-1}$, mens vi endvidere noterer, at $d_0 = \dot{d}_0 = 0$.

- Opstil dæmpningsmatricen via modaldæmpning.
- Bestem den partikulære del af $d_1(t)$ og $d_2(t)$ via modaldekobling.
- Approximer den partikulære del af $d_1(t)$ og $d_2(t)$ via modaltrunkering.
- Bestem den stationære del af $d_1(t)$ og $d_2(t)$ via Fouriertransformation.



Derivation

Indledende defineres systemet, i MATLAB som vist herunder:

```
%Definition af kendte størrelser:
m = 1.5;
L = 1.2^(1/3);
EI = 10;
k = 12*EI/L^3;
dof = 2;
zeta = [0.05; 0.05];
F_0 = [0; 4];
Omega = 5.5;
F = F0 * cos(Omega*t);

%Modellering af systemet:
K = 2 * [k -k ; -k 2*k]; %Stivhedsmatrice
M = m*eye(dof); %Massematrice
[Phi, Lambda] = eig(K,M); %Egenvektorer og dertilhørende egenverdier
omegaN = sqrt(diag(Lambda)); %Udtræk egenfrekvenser fra egenverdier
[omegaN, origOrder] = sort(omegaN); %Sorter egenfrekvenser mens vi tracker den
%oprindelige rækkefølge for at kunne sortere egenvektorer

Phi = Phi(:, origOrder); %Sorter egenvektorer i samme rækkefølge som egenfrek.
Phi = Phi./Phi(1,:); %Smart trick fra løsningsforslag - her skaleres alle
%egenvektorer med deres første index idet egenvektorer ikke er entydige
```

Vi definerer ligeledes et “standard” tidsinterval:

```
N = 1500; %Antal "tidspunkter"
dt = 0.01; %Afstand mellem "tidspunkter"
t = 0:dt:(N-1)*dt; %Alle "tidspunkter"
```

Vi har at modaldæmpningsmatricen er givet ved:

$$\tilde{c}_{ii} = 2\zeta_i \tilde{m}_{ii} \omega_i.$$

Heri mangler vi blot at finde modalmassematricen

$$\tilde{M} = \Phi^T M \Phi.$$

Dernæst kan modaldæmpningsmatricen omregnes til den “almindelige dæmpningsmatrice” som:

$$C = (\Phi^T)^{-1} \tilde{C} \Phi^{-1}.$$

Dette implementeres i MATLAB som:

```
MTilde = Phi' * M * Phi;
CTilde = diag(2.*zeta.*diag(MTilde).*omegaN);
C = (Phi')^-1 * CTilde * Phi^-1
```

Køres dette program fås dæmpningsmatricen til:

$$C = \begin{bmatrix} 1,55 & -0,775 \\ -0,775 & 2,33 \end{bmatrix}.$$

Fra modaldekobling har vi at:

$$\tilde{M}\ddot{q}(t) + \tilde{C}\dot{q}(t) + \tilde{K}q(t) = \tilde{F}(t).$$

Heri definerer vi i øvrigt

$$\tilde{F}(t) = \Phi^T F(t), \quad \tilde{K} = \Phi^T K \Phi.$$

Det ovenstående modaldekoblede system svarer til et SDOF-system med den partikulære løsning:

$$d_p(t) = B \cos(\Omega t - \epsilon),$$

hvor

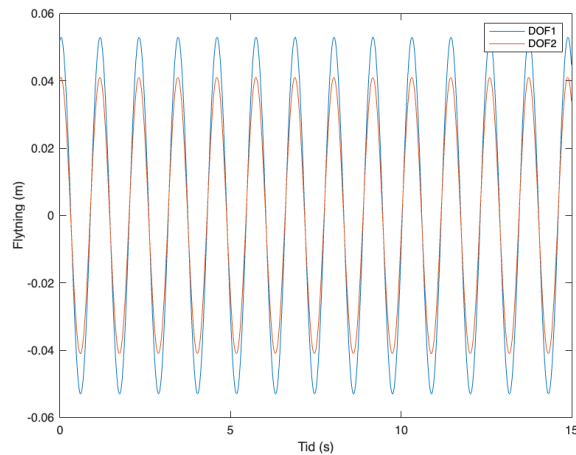
$$B = \frac{\tilde{F}}{\sqrt{(\tilde{K} - \tilde{M}\Omega^2)^2 + \tilde{C}^2\Omega^2}}, \quad \epsilon = \left(\frac{\tilde{C}\Omega}{\tilde{K} - \tilde{M}\Omega^2} \right).$$

Slutteligt omregnes q -værdierne som det ovenstående giver til de tilsvarende “almindelige” forskydninger ved at multiplisere med Φ . Dette implementeres vi i MATLAB som:

```
KTilde = Phi' * K * Phi;
FTilde = Phi' * F;
qPart = zeros(dof, N);
for jj=1:dof
    Bj = FTilde(jj,1)/sqrt((KTilde(jj,jj) - MTilde(jj,jj)*Omega^2)^2
                           + CTilde(jj,jj)^2*Omega^2);
    epsj=atan2(CTilde(jj,jj) * Omega, (KTilde(jj,jj) - MTilde(jj,jj) * Omega^2));
    qPart(jj,:) = Bj * cos(Omega*t-epsj);
end
dPart = Phi * qPart;

figure; plot(t, dPart(1,:))
```

Hvilket givet plottet på [Figure 0.7](#) når det køres.



Figur 0.7: Plot der viser den partikulære del af d_1 og d_2 .

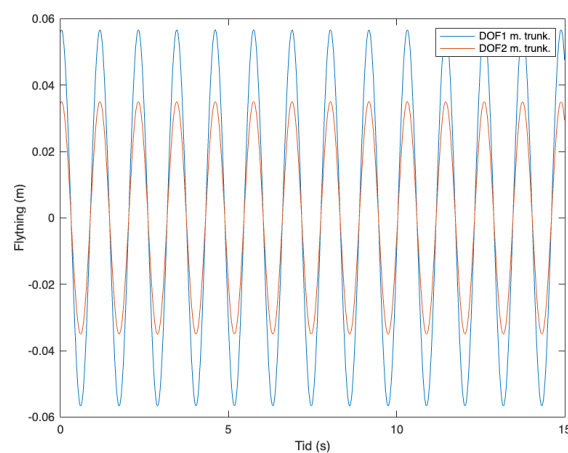
Vi beholder nu kun den første mode og modaltrunkerer resten som:

```
modeToKeep = 1;
dPartTrunc = Phi(:, modeToKeep) * qPart(modeToKeep, :);
```

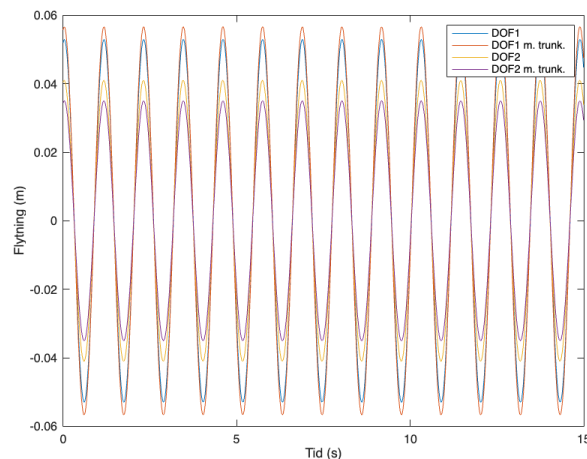
```
figure; plot(t, dPartTrunc(1,:), t, dPartTrunc(2,:))
xlabel('Tid (s)'); ylabel('Flytning (m)')
legend('DOF1 m. trunk.', 'DOF2 m. trunk.')
```

```
figure; plot(t, dPart(1,:), t, dPartTrunc(1,:), t, dPart(2,:), t, dPartTrunc(2,:))
xlabel('Tid (s)'); ylabel('Flytning (m)')
legend('DOF1', 'DOF1 m. trunk.', 'DOF2', 'DOF2 m. trunk.')
```

Hvilket giver de to plots på hhv. [Figure 0.8](#) og [Figure 0.9](#).



Figur 0.8: De to trunkerede løsninger.



Figur 0.9: Do to trunkeerede løsninger samt de to ikke-trunkeerede løsninger.

Lecture 10: Tvungen Svingning af MDOF-systemer (del II)

11.–18. November 2025

Problem 10.1

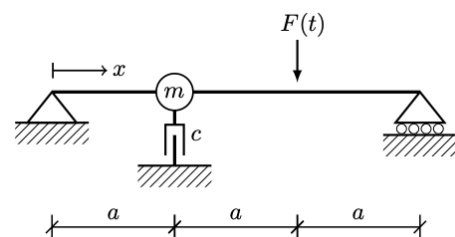
Implementer Newmark-metoden (eksempelvis i MATLAB) og valider implementeringen. Hvorledes kan denne validering realiseres?

Lecture 11: Modellering af Diskrete Systemer

18. November 2025

Problem 11.1

Vi betragter det viste bjælkesystem, der skal analyseres som et ækvivalent SDOF-system med den transverse bevægelse af punktmassen m ved $x = a$ som frihedsgraden. En dæmpningsmekanisme er påført som vist, og systemet påvirkes i punktet $x = 2a$ af en ekstern kraft $F(t)$. Bjælken, der er uniform samt masse og dæmpningsløs, har længden $L = 3a$, arealinertimomentet I samt elasticitetsmodul E .



- Bestem stivheden af det ækvivalente SDOF-system, k_{eq} , angivet med hensyn til E , I og L .
- Bevis, at den eksterne kraft i det ækvivalente SDOF-system bliver

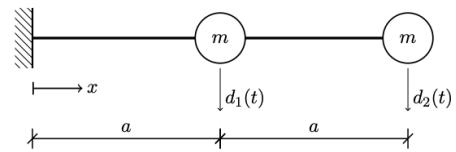
$$F_{eq}(t) = \frac{7}{8}F(t).$$

Det oplyses nu, at vi (i SI-enheder) har $F(t) = 300$, $EI = 100$, $L = 2$, $m = 3$, $c = 10$ samt $d_0 = \dot{d}_0 = 0$.

- Er det ækvivalente SDOF-system underkritisk, kritisk eller overkritisk dæmpet?
- Bestem den stationære flytningsrespons i det ækvivalente SDOF-system.
- Bestem den stationære accelerationsrespons i det ækvivalente SDOF-system.

Problem 11.2

Vi betragter det viste system, hvori bjælken er masseløs og uniform og har længden $L = 2a$, arealinertimomentet I samt elasticitetsmodul E . En punktmasse med størrelsen m er placeret ved $x = a$, og en punktmasse med størrelsen m er placeret ved $x = 2a$. Systemet skal analyseres som et 2DOF-system, hvori d_1 og d_2 udgør frihedsgraderne. Bjælken skal behandles som en Euler-Bernoulli-bjælke.



- Opstil stivheds- og massematricen (hint: anvend D'Alemberts princip).
- Bevis, at de udæmpede vinklegenfrekvenser er givet ved

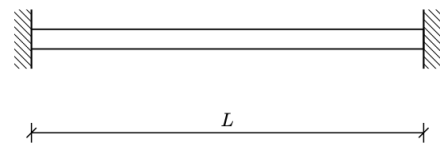
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6EI}{7ma^3} (9 - \sqrt{74})}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{6EI}{7ma^3} (9 + \sqrt{74})}.$$

Lecture 12: Svingning af rumligt kontinuerte systemer (del I)

25. November 2025

Problem 12.1

Vi betragter den viste stang, der er rumligt kontinuert og uniform. Stangen, der har længden L , tværsnitsarealet A , elasticitetsmodul E og massedensiteten ρ , dissiperer ikke energi.



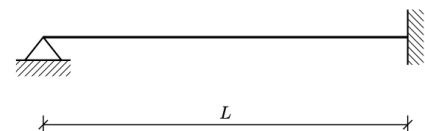
- Angiv de gældende randbetingelser.
- Bestem stangens egenfrekvenser.
- Bestem stangens egensvingningsformer.

Lecture 13: Svingning af rumligt kontinuerte systemer (del II)

2. December 2025

Problem 13.1

Vi betragter transversalsvingning af den viste bjælke, der er rumligt kontinuert og uniform. Bjælken, der har længden L , tværsnitsarealet A , arealinertimomentet I , elasticitetsmodul E og massedensiteten ρ , dissiperer ikke energi.



- Angiv de gældende randbetingelser i forhold til transversalsvingning.
- Bestem egenfrekvenserne associeret med bjælkens transversalsvingning.
- Bestem de tilhørende egensvingningsformer.

Problem 13.2

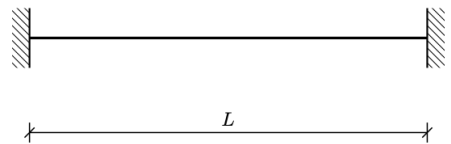
Bevis at bevægelsesligningen for vridningsegensvingning af en to-dimensionel, uniform bjælke er

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

hvor $\theta = \theta(x, t)$ er vridningen, G er forskydningsmodulet, og ρ er massedensiteten. Hint: Lad $T = T(x, t)$ være vridningsmomentet og I_p det polære inertimoment, så gælder $T = GI_p \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

Problem 13.3

Vi betragter vridningssvingning af den viste bjælke, der er rumligt kontinuert og uniform. Bjælken, der har længden L , arealet A , det polære inertimoment I_p , forskydningsmodulet G og massedensiteten ρ , dissiperer ikke energi.



- Angiv de gældende randbetingelser i forhold til vridningssvingning.
 - Bestem egenfrekvenserne associeret med bjælkens vridningssvingning.
 - Bestem de tilhørende egensvingningsformer.
-